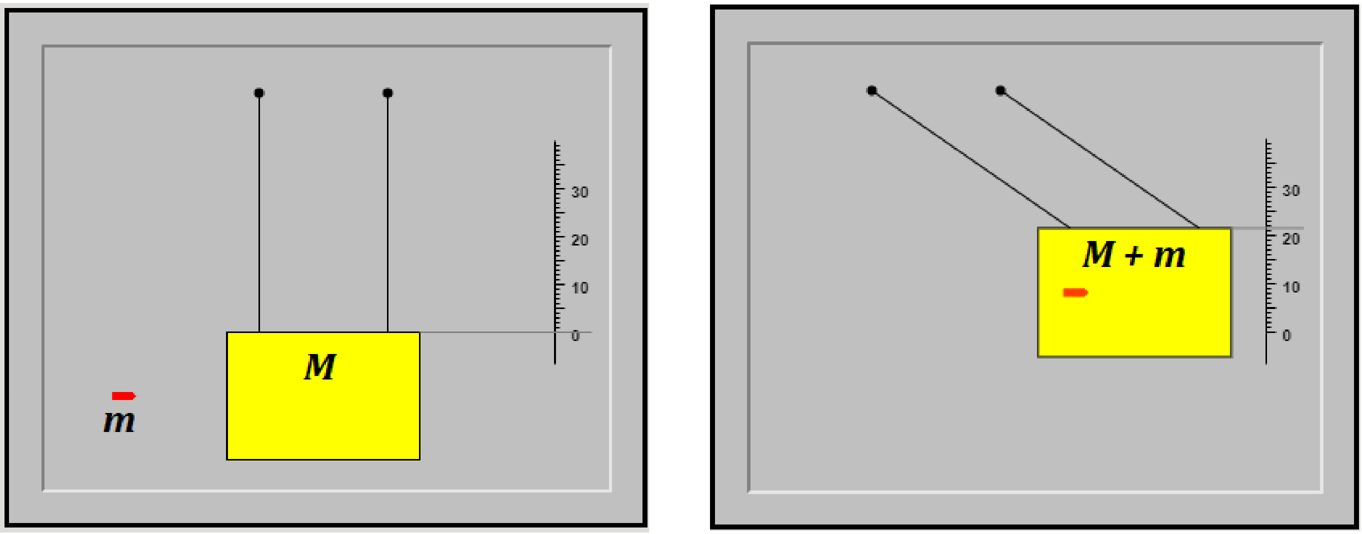
MPSI 1 - DS 5 - 02/02/2022

Consignes générales :

- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, $\boxed{\text{résultats encadrés}}$.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- PENDULE BALISTIQUE

Le pendule balistique, mis au point en 1742 par Benjamin Robins, est un dispositif de mesure de la vitesse d'un projectile à partir de l'effet de son impact sur un pendule pesant en supposant le choc parfaitement inélastique, donc que le projectile s'incorpore à la cible (Wikipédia).



Simulations : http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/balistique.html

L'étude se fait en référentiel terrestre galiléen.

Le pendule de masse M est soutenu par deux tiges qui lui permettent d'osciller sans rotation.

Le projectile de masse m, de trajectoire horizontale, percute M à la vitesse v et y pénètre. Le pendule, dont la masse est donc désormais $m + M$, monte d'une hauteur H au-dessus de sa position initiale.

Le choc est suffisamment bref pour que les forces extérieures au système $\{m, M\}$ n'agissent pas, ce qui entraîne la *conservation de la quantité de mouvement totale* de ce système, entre juste avant le choc et juste après, la masse m étant alors liée à M.

1. Exprimer la vitesse V du pendule juste après le choc, en fonction des masses et de v.
2. En déduire la proportion d'énergie mécanique transformée en chaleur au moment du choc, par la déformation des matériaux.
3. On néglige tout frottement ; montrer que la mesure de H donne accès à la valeur de v.
4. A.N. : calculer la proportion d'énergie dissipée et v pour $M = 10$ kg, $m = 42$ g, $H = 22$ cm.

2- DOSAGES D'ACIDE FORMIQUE

A- On dose en solution aqueuse l'acide méthanoïque (= formique) HCO_2H par la soude (Na^+,OH^-) de même concentration c_0. On donne pKa = 3,8 pour le couple HCO_2H / HCO_2^- (ou AH / A^-).

1. Écrire la réaction de dosage et calculer sa constante.
2. Justifier qu'à l'équivalence, on a [HCO_2H] = [OH^-] et $[HCO_2^-] \approx \frac{c_0}{2}$.
3. Calculer alors [OH^-] puis le pH à l'équivalence, pour $c_0 = 0{,}1$ mol/L .
4. Calculer la proportion d'acide non dosé à l'équivalence ; conclure.

B- On envisage maintenant de doser cet acide par de l'ammoniaque, de même concentration.

On donne pKa = 9,2 pour le couple NH_4^+ / NH_3.

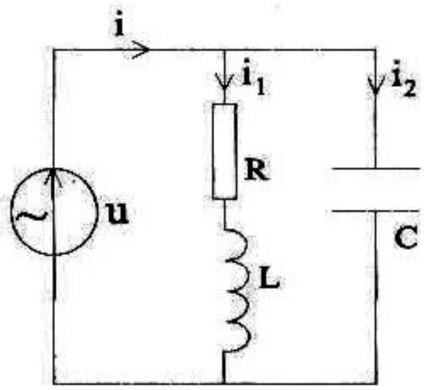
1. Écrire la réaction de dosage et calculer sa constante.
2. Justifier qu'à l'équivalence, on a [HCO_2H] = [NH_3] et [HCO_2^-] = [NH_4^+].
3. En déduire la valeur du pH à l'équivalence, en fonction des pKa des couples.
4. Calculer la proportion d'acide non dosé à l'équivalence ; conclure.

3- DIPOLES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

A- Tensions et intensités

Dans le circuit ci-contre :

- $u(t) = 120\sqrt{2}\sin(100\,\pi\,t + \pi/3)$ (volts)
- $R = 60\ \Omega$; $C = 16$ µF ; $L = 240$ mH.



1. Exprimer *l'amplitude complexe* de $u(t)$.
2. Calculer *les amplitudes* des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
3. Calculer et commenter *les déphasages* respectifs des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ par rapport à $u(t)$.
4. Exprimer littéralement *l'impédance complexe* $\underline{Z}_{eq}$ du dipôle équivalent vu par la source, puis calculer numériquement son module Z_{eq}.
5. En déduire la valeur de *l'intensité efficace* fournie par la source, et *le déphasage* de $i(t)$ par rapport à la tension d'alimentation. Le circuit est-il globalement capacitif ou inductif ?

B- Pulsation propre et facteur de qualité

1. Exprimer pour une pulsation ω l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un circuit RLC série, puis l'exprimer à l'aide de R, d'une variable adimensionnée $x = \omega/\omega_0$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/R$.

On désigne par $\underline{Z'}$ l'impédance complexe de l'association parallèle d'un condensateur de capacité C d'une part, d'une bobine d'inductance L en série avec une résistance R d'autre part.

2. Exprimer $\underline{Z'}$ en fonction de $\underline{Z}, R, Q, x$.
3. Montrer que pour $Q \gg 1$, on peut écrire $\underline{Z'} = \frac{Q^2R^2}{\underline{Z}}$.
4. Que devient $\underline{Z'}$ lorsque la pulsation tend vers ω_0 ? Que conclure ?

— = FIN = —

1- PENDULE BALISTIQUE

Pendule balistique

1) Conservation de $\vec{p}$: $m\vec{v} = (m+M)\vec{V} \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{m+M} v}$

2) $E_c(\text{avant}) = \frac{1}{2} m v^2$

$E_c(\text{après}) = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2 = \frac{m}{m+M}E_c(\text{avant}) \ll E_c(\text{avant})$ si $m \ll M$.

Perte relative : $\boxed{\frac{\Delta E_c}{E_c(\text{avant})} = -\frac{M}{M+m}} \simeq -\left(1-\frac{m}{M}\right)$ si $m \ll M$. La dissipation est donc très importante.

3) TEM entre juste après le choc et la hauteur atteinte :

$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2 = (m+M)gH \Leftrightarrow \boxed{v = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gH}}$

4) $\boxed{\frac{\Delta E_c}{E_c} \simeq -0,996 \ ; \ v \simeq 499 \text{ m/s}}$.

2- DOSAGES D'ACIDE FORMIQUE

Acide formique + base forte

1) $OH^- + AH = H_2O + A^-$ $\boxed{K = \frac{K_A}{K_e} = 10^{10,2}}$

tableau à l'équivalence:

	OH^-	AH	A^-
	n_0	$= n_0$	0
	$\varepsilon \ll n_0$	ε	$\simeq n_0$

2) Dans les proportions de l'équivalence, on aura $[OH^-] = [AH] = \frac{\varepsilon}{2v_0}$ et $[A^-] = \frac{n_0}{2v_0} = \frac{c_0}{2}$.

En effet $n_a = n_b \Leftrightarrow c_a v_0 = c_b v_e$ et donc $\underline{v_e = v_0}$ car $c_b = c_a$.

3) à l'éq. : $K = \frac{[A^-]}{[AH][OH^-]} = \frac{c_0/2}{[OH^-]^2} \Rightarrow [OH^-] = \sqrt{\frac{c_0}{2K}} \simeq 1,78.10^{-6}$ mol/L $\Leftrightarrow pH \simeq 8,25$.

4) $pH = pK_A + \log\frac{[A^-]}{[AH]} = pK_A + \log\frac{n(A^-)}{n(AH)} = pK_a + \log\frac{n(AH\ dosé)}{n(AH\ qui\ reste)}$

On a donc $\frac{n(AH\ non\ dosé)}{n(AH\ dosé)} = 10^{pKa - pH} = 10^{3,8-8,25} \simeq 3,55.10^{-5}$: dosage quasi-total.

Acide formique + ammoniaque

1) $NH_3 + AH = NH_4^+ + A^-$

$K(A_1 + B_2 = A_2 + B_1) = \frac{K(A_1/B_1)}{K(A_2/B_2)}$ donc $K = \frac{10^{-3,8}}{10^{-9,2}} = 10^{5,4}$ élevée mais sans plus.

2) Par stoechiométrie de l'équation, comme à l'équivalence $n_0(AH) = n_0(NH_3)$, on aura à l'équilibre chimique $[AH] = [NH_3]$ et $[A^-] = [NH_4^+]$.

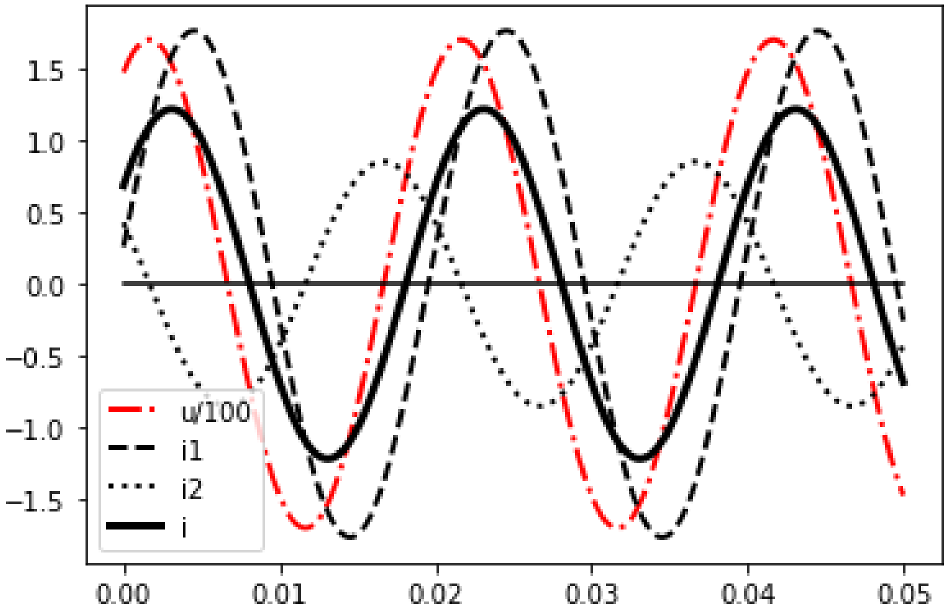
3) $pH = pK_{A_1} + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$ et $pH = pK_{A_2} + \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$ $\Rightarrow 2pH = pK_{A_1} + pK_{A_2} + \log\underbrace{\frac{[A^-]\,[NH_3]}{[NH_4^+]\,[AH]}}_{=1}$

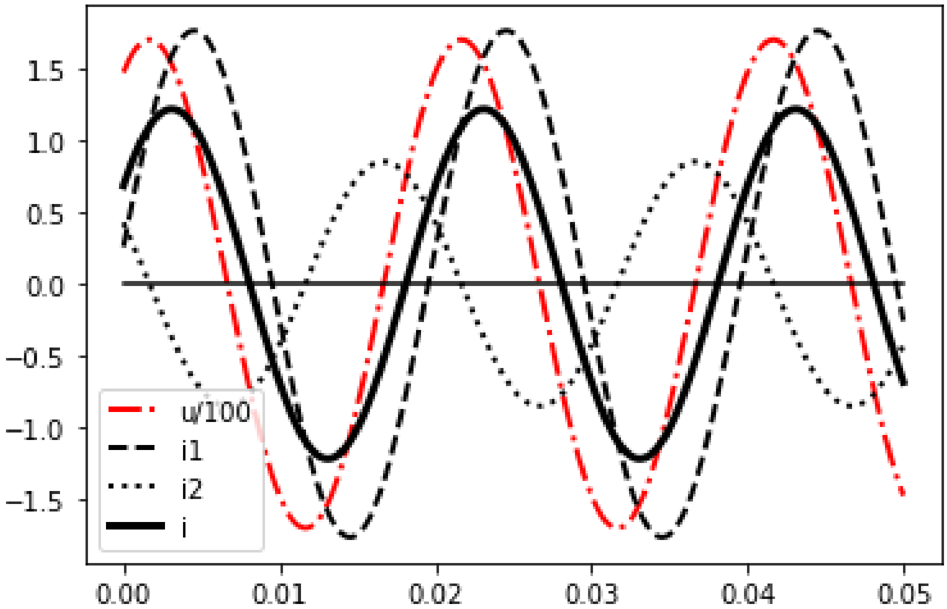
donc $\boxed{pH = \frac{1}{2}(pK_{A_1} + pK_{A_2})} = 6,5$

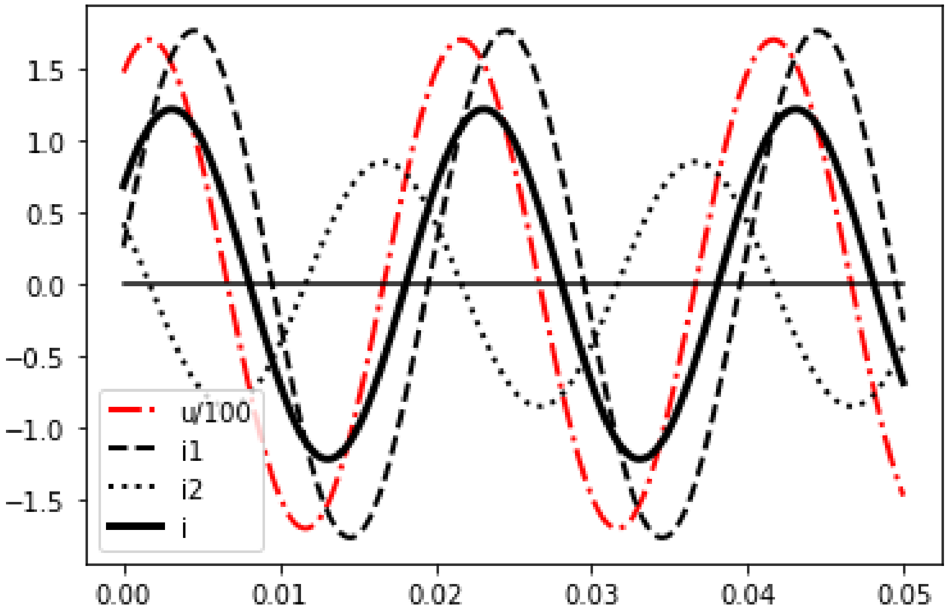
4) $pH = 6,5 \Rightarrow [AH] = 10^{3,8-6,5}[A^-]$ donc la proportion d'acide non dosé est $\simeq 2.10^{-3}$.

Cela n'empêche pas le dosage (à 0,2%) près mais c'est moins bien qu'avec une base forte, et surtout l'amplitude du saut de pH sera bien moins grande.

3- DIPOLES EN RÉGIME SINUSOÏDAL






1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
u/100
i1
i2
i